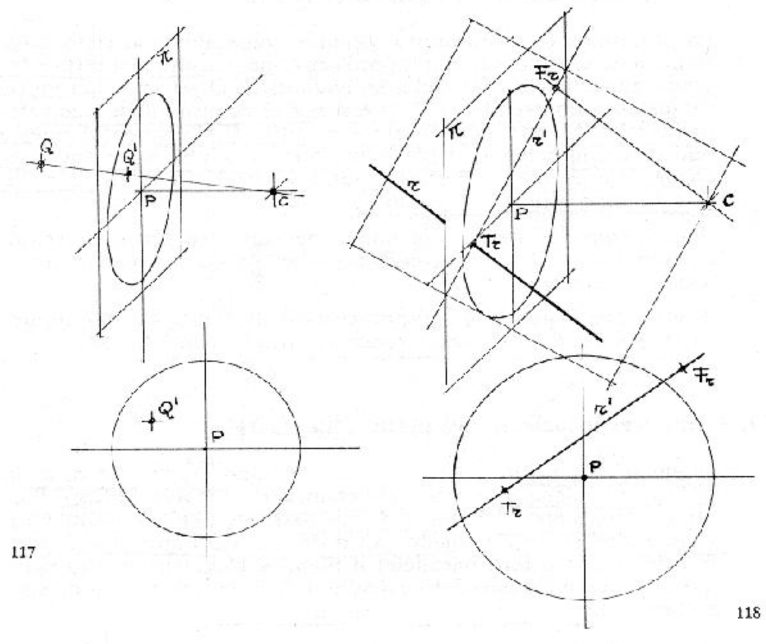
ELEMENTI DI TEORIA DELLA PROSPETTIVA

ELEMENTI DI RIFERIMENTO (figg. 117-119)
Ricordiamo: la proiezione centrale, o conica, non conserva il parallelismo.
Sono assegnati (fig. 117):
a) un solo centro C di proiezione proprio.
b) un solo piano π di proiezione.
e) un cerchio di distanza. appartenente a π di centro P (proiezione ortogonale di C su π) e di raggio CP.
Dato un punto Q diremo che il punto comune fra la retta proiettante CQ ed il piano π è la proiezione del punto Q su π dal centro C e che indicheremo con Q'.
E' evidente che tutti i punti della retta proiettante CQ danno, per proiezione su π, il punto Q'; pertanto, se è possibile, dato un punto Q nello spazio, determinare la sua proiezione Q', non è viceversa possibile risalire al punto oggettivo Q assegnato quando sia dato Q'.
Analogamente, data una retta r, diremo che la retta comune tra il piano proiettante Cr e il piano π, è la proiezione della retta r dal centro C su π, e la indicheremo con r'.
E' altresì evidente che tutte le rette del piano proiettante danno, per proiezione su π, la r'; data r è possibile quindi determinare la r', mentre, come nel caso dei punti, non è possibile il contrario (fig. 118).
Per stabilire dunque, date le proiezioni di un punto o di una retta, quali siano gli enti oggettivi assegnati, occorre introdurre qualche altro elemento di riferimento.

RAPPRESENTAZIONE DELLA RETTA (fig. 118)
Precisiamo subito che il procedimento da seguire per rappresentare il punto è del tutto analogo.
Abbiamo visto, che sono stati determinati per la retta r, oltre alla immagine r', due elementi di riferimento:
a) la traccia della retta Tr punto comune fra la r e π, che è elemento unito, immagine di se stesso.
b) La fuga della retta Fr, proiezione su π del punto improprio della r; la fuga è il punto comune fra la parallela alla r condotta per C e il quadro π.

Questi elementi di riferimento sono sufficienti per risalire alla retta oggettiva. Basterà infatti, noti Tr e Fr, unire Fr con C e condurre quindi da Tr la parallela alla CFr per ottenere la r; ovviamente la retta che unisce Tr e Fr su π è r', immagine di r.



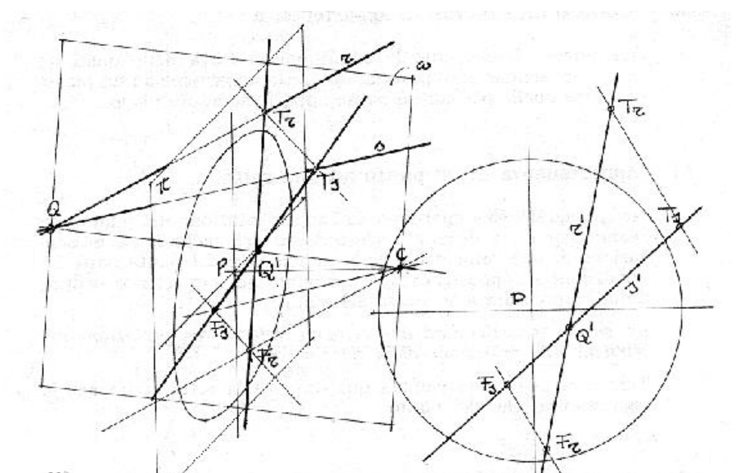
117
118

Casi particolari

Le rette parallele al quadro π hanno la traccia e la fuga coincidenti con il punto improprio.
Le rette proiettanti, cioè quelle che passano per C, hanno la traccia, la fuga e la loro stessa immagine coincidenti nello stesso punto.

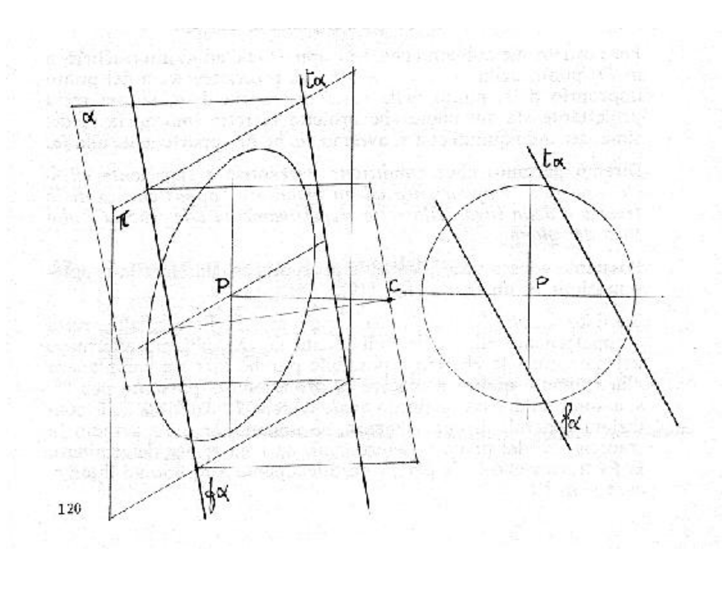
RAPPRESENTAZIONE DEL PUNTO (fig. 119)
La proiezione Q' di un punto Q non è, come abbiamo visto, sufficiente a determinare la sua rappresentazione; scelta una retta r fra quelle appartenenti alla stella individuata da Q, se ne dà la rappresentazione comprendente Q..
Q è il punto comune delle due rette incidenti CQ, retta proiettante e r, retta di riferimento; queste due rette individuano il piano proiettante ω che interseca π secondo l'immagine r'. Pertanto avremo che i tre punti di π Tr, Q' e Fr sono allineati secondo r'.
Questa considerazione vale anche per un'altra terna di punti, ad esempio Ts, Q' e Fs, a condizione che la s sia complanare alla r (passante per Q).
Diremo che il punto Q è rappresentato da Q' (proiezione di Q) appartenente alla retta r' (r', Tr, Fr) oppure alla retta s' (s', Ts, Fs).

RAPPRESENTAZIONE DEL PIANO (fig. 120)



119

Assegnato un piano α generico, chiameremo tα, traccia di α, la retta intersezione di α con π; fα chiameremo invece la fuga di α, retta intersezione di π con il piano passante per C e parallelo a α; fα rappresenta l'immagine su π della retta impropria di α.
tα e fα sono fra loro parallele; il piano a viene ricostruito nello spazio come piano parallelo a quello individuato da C e fα: diremo pertanto che α è rappresentato dalle rette tα, fα.
Casi particolari
Piani paralleli al quadro hanno la traccia e la fuga coincidenti con la retta impropria del quadro stesso;



120

Piani proiettanti assegnati hanno la traccia e la fuga coincidenti.

CONDIZIONI GENERALI DI APPARTENENZA

Analizziamo brevemente le condizioni in forza delle quali un punto appartiene ad una retta, una retta appartiene ad un piano, ed infine quelle per cui un punto appartiene ad un piano.

APPARTENENZA DI UN PUNTO AD UNA RETTA

Nei paragrafo riguardante la rappresentazione del punto, abbiamo, per forza di cose, dovuto descrivere anche la rappresentazione di una retta della stella individuata dal punto dato. La condizione di appartenenza di un punto ad una retta si deduce dalla rappresentazione stessa del punto:

un punto appartiene ad una retta quando la sua proiezione appartiene alla proiezione della retta stessa.

Tale condizione non cambia qualsiasi sia la retta scelta per la rappresentazione del punto.

APPARTENENZA DI UNA RETTA AD UN PIANO (fig. 121)

Siano dati la retta r - (Tr, Fr) ed il piano α - (α_1, α_2).

Per costruzione abbiamo che, se r appartiene ad α, intersecherà π in Tr, punto della tα; anche se Fr è la proiezione su π del punto improprio di r, punto della retta impropria di α, la sua retta proiettante sta sul piano che proietta la retta impropria medesima; secando quindi con π, avremo anche Fr appartenente alla fα.

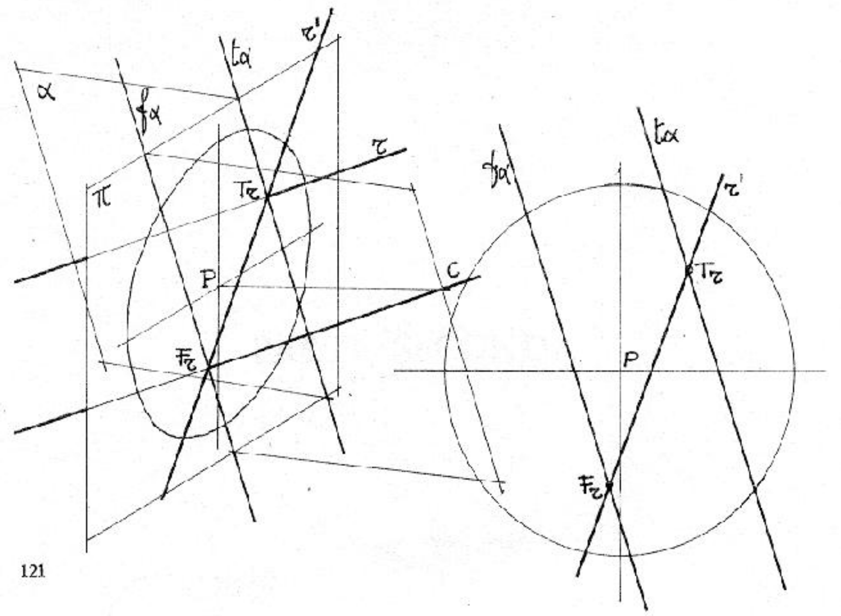
Diremo pertanto che:

condizione necessaria e sufficiente affinché una retta r appartenga ad un piano α e l'appartenenza della traccia e della fuga della retta rispettivamente alla traccia e alla fuga del piano.

Possiamo adesso vedere come si procede per cambiare la rappresentazione di un punto (fig. 119).

Sia dato il punto Q - (Q', Tr, Fr); vogliamo scegliere un'altra retta s appartenente alla stella individuata da Q. Abbiamo affermato che ciò è possibile purché la s sia complanare alla r; scelta quindi a piacere la proiezione s' passante per Q', si assume su di essa un punto quale traccia, Ts. In forza delle condizioni generali di appartenenza, se uniamo Tr e Ts avremo la traccia, tα, del piano α determinato da r ed s; per determinare la Fs tracceremo la fα per Fr parallelamente a tα fino ad intersecare s in Fs.

CONDIZIONI GENERALI DI PARALLELISMO



121

Le condizioni di parallelismo fra rette e piani nelle proiezioni centrali si esprimono fra le loro rispettive fughe.

Diremo che:

due rette o due piani sono fra loro paralleli quando hanno le relative fughe coincidenti;

una retta ed un piano sono paralleli quando la fuga della retta appartiene alla fuga del piano.

CONDIZIONI GENERALI DI PERPENDICOLARITA'

Assumendo un piano α proiettante (obliquo al quadro), ed una retta r proiettante ortogonale ad α, si osserva che un piano γ ortogonale al quadro e ad α e passante per S, individua il triangolo rettangolo RSF'r, retto in S e con l'altezza S-Sπ relativa all'ipotenusa (fig. 18.17);

Non potrebbe non essere così, perché tutti i piani passanti per una retta r ortogonale ad un piano α individuano rette

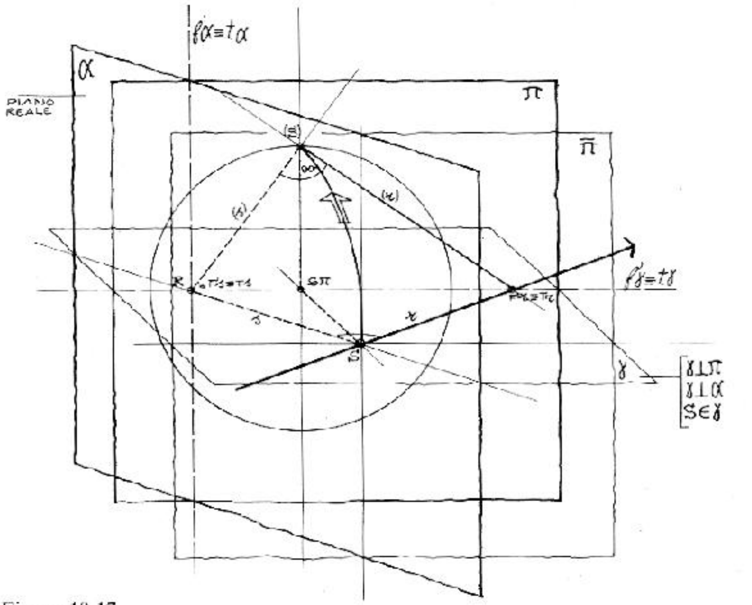


Figura 18.17.

d'intersezione ortogonali alla r, il che si verifica appunto per la retta s, quindi la retta r e la retta s risultano ortogonali tra loro. Ribaltando su π questo triangolo rettangolo RSF'r ruotando sull'ipotenusa (cioè sulla retta di fuga di γ), il vertice dell'angolo retto al termine della rotazione coincide con un punto del cerchio di distanza (S).
Le relative costruzioni grafiche per l'esecuzione della figura descrittiva, sono rese possibili dalla conoscenza del cerchio di distanza e dal ribaltamento dei triangolo suddetto (fig. 18.18). Risulta così dimostrata l'ortogonalità fra le due rette.

Le rette r e la s sono ortogonali fra loro e passanti ambedue per il centro di proiezione S; ne consegue che: F'r è punto

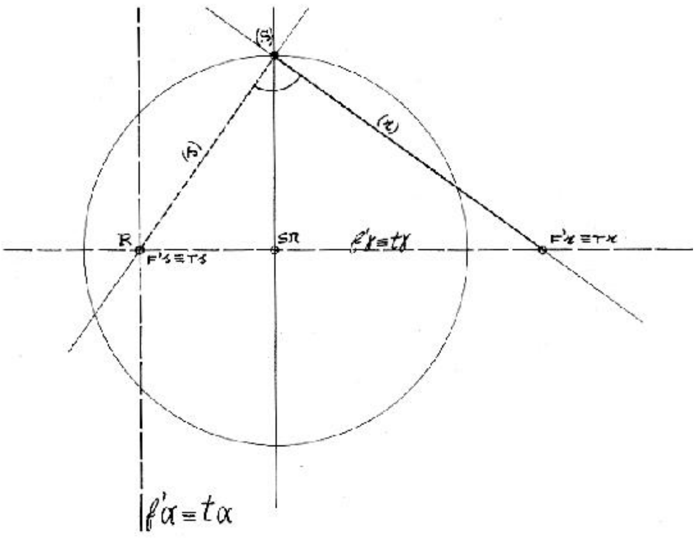


Figura 18.18.

di fuga della retta r ortogonale ad s e F's è punto di fuga della retta s ortogonale ad r; questi due punti di fuga si dicono anticoniugati o antireciproci.
Concludendo, *la condizione necessaria e sufficiente, perché due rette siano ortogonali fra loro è che i loro punti di fuga siano anticoniugati rispetto al cerchio di distanza* (fig. 18.20),

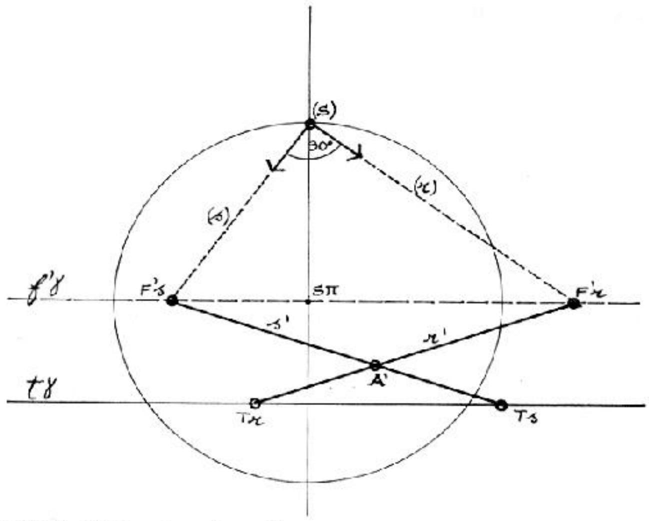


Figura 18.20. Rette r ed s ortogonali.

mentre *la condizione necessaria e sufficiente, perché due piani siano fra loro ortogonali, è che la retta di fuga dell'uno sia ortogonale alla retta di fuga dell'altro* (α e β ortogonali a γ), *oppure che passino per rette perpendicolari tra loro r ed s;* la retta di fuga di α (fα) passa per il punto di fuga F's della retta s ortogonale alla retta r (fig. 18.21).

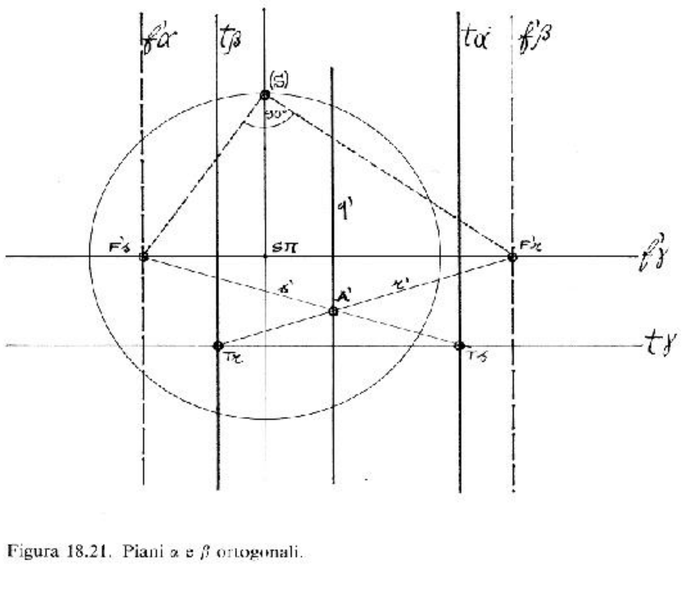


Figura 18.21. Piani α e β ortogonali.

La dispensa è tratta dal libro di Ugo Saccardi: Applicazioni della geometria descrittiva; LEF editrice.